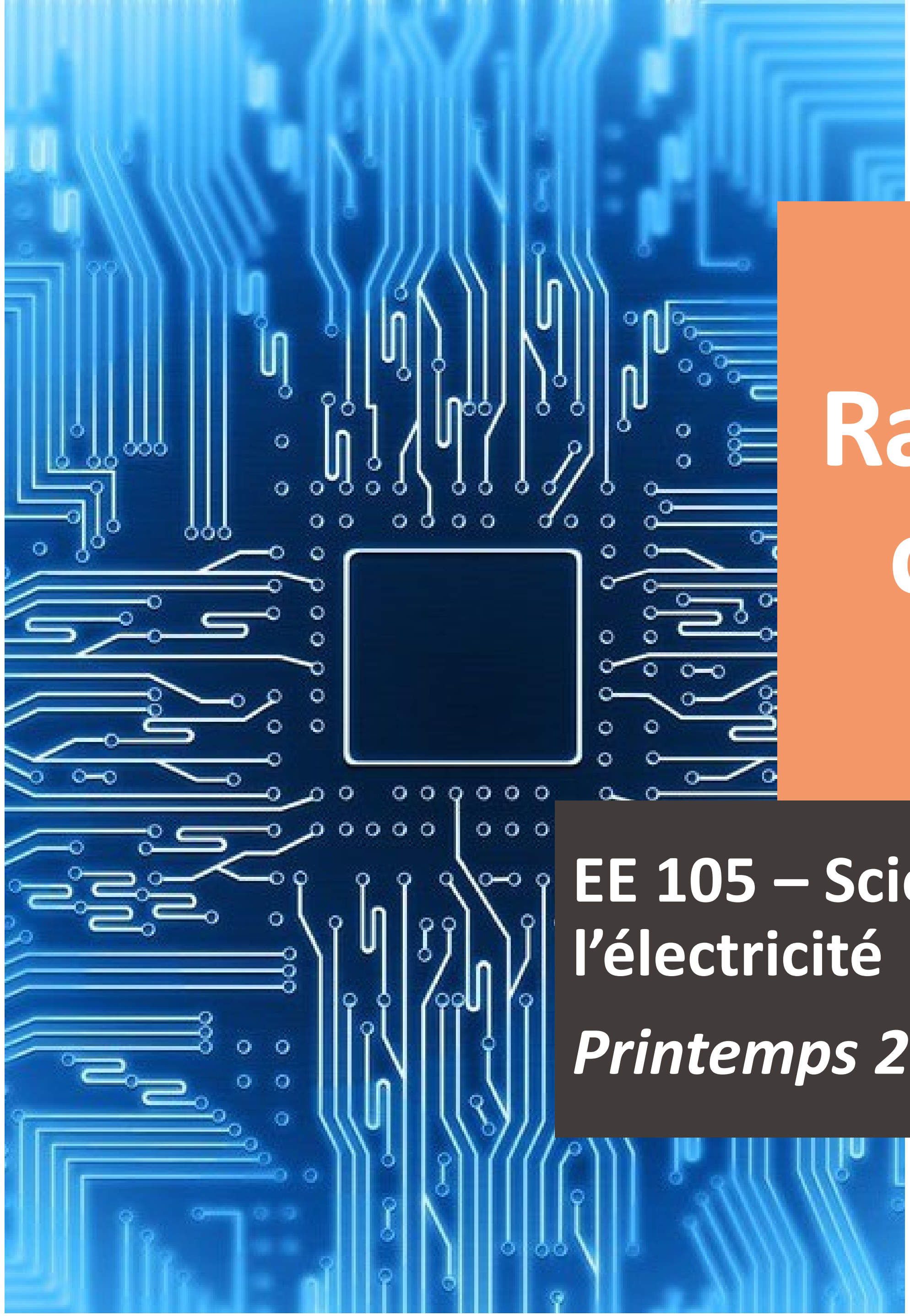


Rappel sur les nombres complexes

EE 105 – Sciences et Technologies de l'électricité

Printemps 2022

Prof. Camille Brès - camille.bres@epfl.ch

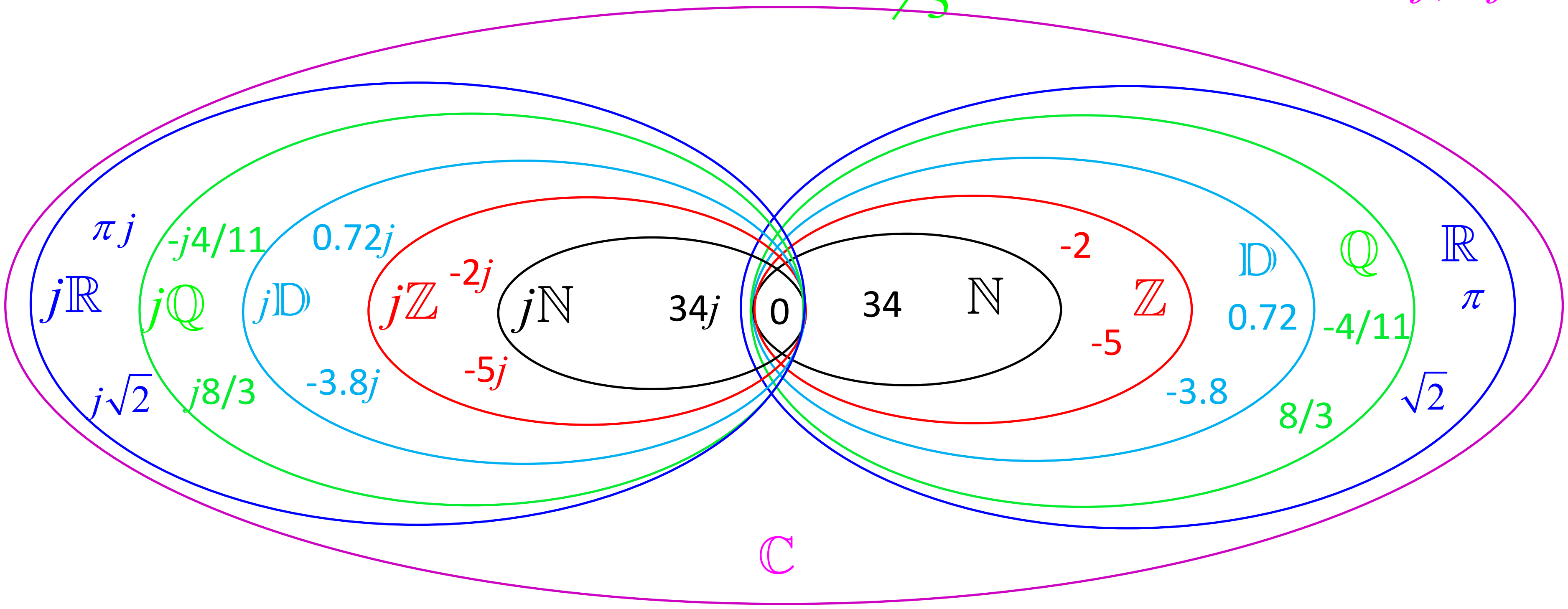
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Ensemble de nombres

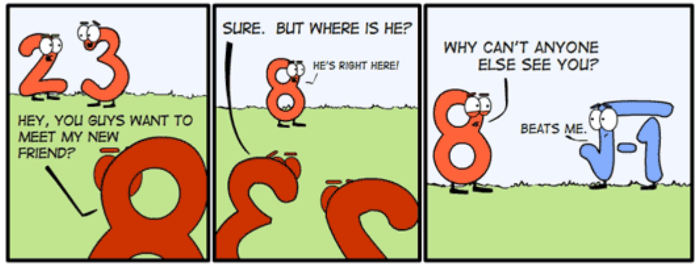
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Entiers naturels, Entiers relatifs, Décimaux, Rationnels, Réels, Complexes

$x+1=3$	$x+7=6$	$2x=1$	$3x=1$	$x^2=2$	$x^2+1=0$
$x=2\in\mathbb{N}$	$x=-1\in\mathbb{Z}$	$x=0.5\in\mathbb{D}$	$x=\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$	$x=\sqrt{2}\in\mathbb{R}$	$x=j,-j\in\mathbb{C}$



Nombre complexe



Le nombre imaginaire j: $j^2 = (-j)^2 = -1$

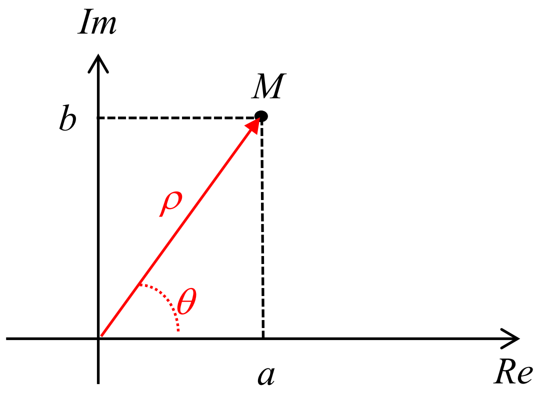
Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = a + jb$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

- a est la partie réelle de z: $a = \mathrm{Re}(z)$
- b est la partie imaginaire de z: $b = \mathrm{Im}(z)$
- L'écriture $z = \mathrm{Re}(z) + j\ \mathrm{Im}(z)$ est unique:

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

- Si $b = 0, z = a$: z est réel
- Si $b \neq 0$, et $a = 0$: z est *imaginaire pur*

Représentation graphique du complexe $a + jb$



$$z = a + jb$$

$$a = \rho\cos\theta$$
$$b = \rho\sin\theta$$
$$\Longrightarrow z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$
$$\Updownarrow$$

La forme exponentielle de z s'obtient en utilisant la formule d'Euler: $z = \rho e^{j\theta}$

On appelle ρ le module de z:

- $|z| = \rho$ et $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

On appelle θ l'argument de z en radian (ou °) :

- $\arg(z) = \theta$
- $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|z|}$

Pour $a \neq 0$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \bmod \pi$

Si $a > 0$, alors θ est dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Si $a = 0$, alors $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ si $b > 0$ ou $b < 0$

Si $a < 0$, alors θ est dans $\left]-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

EPFL

Recapitulatif des formes des nombres complexes

Les nombres complexes peuvent être représentés de plusieurs manière:

- Forme cartésienne algébrique: $z = a + jb$
- Forme polaire exponentielle: $z = \rho e^{j\theta}$
- Forme polaire trigonométrique: $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

Example 1: écrire $z = 1 - j$ sous forme polaire exponentielle

Example 2: écrire $z = 2\exp\left(j\frac{4\pi}{3}\right)$sous forme algébrique

Propriétés module et argument

Conjugé d'un nombre complexe $z = a + jb$ est $z^* = a - jb$

- $zz^* = |z|^2$

Le module $|z| = \rho$:

- $|z| \geq 0$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ si $z_2 \neq 0$

L'argument θ

- Les reels strictement positifs (négatifs) ont un argument multiple de 2π (π)
- Les imaginaires purs non nuls ont un argument congru à $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ selon le signe de la partie imaginaire
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Manipulation des nombres complexes – forme algébrique

Soit: $z_1 = a_1 + jb_1$ et $z_2 = a_2 + jb_2$

Addition/soustraction: $z_1 + z_2 = a_1 + jb_1 + a_2 + jb_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

Multiplication: $(z_1 z_2) = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + \mathrm{j}(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Division: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{|z_2|^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} +$$

Manipulation des nombres complexes – forme algébrique

Soit: $z_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{j\theta_2}$

Addition/soustraction: $z_1 + z_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} + \rho_2 e^{j\theta_2} = (\rho_1 \cos\theta_1 + \rho_2 \cos\theta_2) + j(\rho_1 \sin\theta_1 + \rho_2 \sin\theta_2)$

Multiplication: $(z_1 z_2) = \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = (\rho_1 \rho_2) e^{j(\theta_1+\theta_2)}$

$$(z_1 z_2) = (\rho_1 \rho_2)\cos(\theta_1 + \theta_2) + j(\rho_1 \rho_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Division: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1 e^{j\theta_1}}{\rho_2 e^{j\theta_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1-\theta_2)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\frac{\rho_1}{\rho_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Manipulation des nombres complexes

Soit: $z = \rho e^{j\theta}$

- Dérivée: $\dfrac{dz}{d\theta} = j\rho e^{j\theta} = jz$
- Intégrale: $\displaystyle\int z d\theta = \frac{1}{j}\rho e^{j\theta} = \frac{z}{j} = -jz$

Soit: $\underline{u}(t) = \hat{U} e^{j(\omega t+\alpha)}$

- Dérivée: $\dfrac{d\underline{u}(t)}{dt} = j\omega\hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)} = j\omega\underline{u}(t)$
- Intégrale: $\displaystyle\int \underline{u}(t)dt = \frac{\hat{U}e^{j(\omega t+\alpha)}}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}\underline{u}(t)$